

Μάθημα 10: Χάρτης Karnaugh

10.1 Γενικά

Όπως γνωρίζουμε, ένα επιθυμητό ζητούμενο σε μια συνάρτηση άλγεβρας Boole είναι η απλοποίησή της, η γραφή της δηλαδή σε απλούστερη μορφή. Η απλοποίηση αυτή πραγματοποιείται με τη βοήθεια του **χάρτη Karnaugh** ή αλλιώς γνωστό ως πίνακα Karnaugh ή χάρτη K (K-map). Οι χάρτες Karnaugh είναι ένας διαφορετικός τρόπος αναπαράστασης των λογικών συναρτήσεων. Πρόκειται για έναν πίνακα όπου το κάθε τετράγωνό του αναπαριστά ένα συνδυασμό των μεταβλητών της λογικής συνάρτησης.

Ο πίνακας αληθείας μιας λογικής συνάρτησης είναι μοναδικός αλλά όταν η συνάρτηση εκφράζεται αλγεβρικά μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές μορφές. Η αλγεβρική συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί με τις ταυτότητες της άλγεβρας Boole όμως ο τρόπος αυτός αφενός δεν είναι πάντα πρακτικός και αφετέρου δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη του επόμενου βήματος απλοποίησης δυσχεραίνοντας έτσι τη διαδικασία. Αντίθετα με τις αλγεβρικές απλοποιήσεις, η μέθοδος του χάρτη Karnaugh κάνει πιο απλή και άμεση τη διαδικασία απλοποίησης των λογικών συναρτήσεων κάνοντας χρήση σχηματικής μορφής του πίνακα αληθείας της συνάρτησης. Ανάλογα με το πλήθος των μεταβλητών της λογικής συνάρτησης και τον πίνακα αληθείας της, ο χάρτης/πίνακας που δημιουργείται έχει τις αντίστοιχες γραμμές και στήλες, βλ. Σχ. 10.1(α)-(γ).

X \ Y	0	1
0		
1		

(α)

X \ YZ	00	01	11	10
0				
1				

(β)

XY \ ZW	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

(γ)

Σχήμα 10.1: Χάρτης Karnaugh για: (α) 2 μεταβλητές, (β) 3 μεταβλητές, (γ) 4 μεταβλητές.

Γνωρίζοντας λοιπόν τη λογική συνάρτηση ή/και τον πίνακα αληθείας της, τοποθετούμε σε κάθε θέση του χάρτη τις τιμές της ανά περίπτωση. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση $F = X \cdot Y$ ο αντίστοιχος χάρτης που προκύπτει είναι αυτός του Σχ. 10.2(α) ενώ για τη συνάρτηση $F = X + Y$ ο αντίστοιχος χάρτης είναι αυτός του Σχ. 10.2(β).

$F = X \cdot Y$		
X \ Y	0	1
0	0	0
1	0	1

(α)

$F = X + Y$		
X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

(β)

Σχήμα 10.2: Χάρτης Karnaugh για τις συναρτήσεις: (α) $F = X \cdot Y$, (β) $F = X + Y$.

10.2 Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία που ακολουθούμε για την απλοποίηση με χρήση χάρτη Karnaugh συνοψίζεται στα επόμενα βήματα:

1. Τοποθετούμε σε κάθε τετράγωνο του χάρτη την τιμή της λογικής συνάρτησης ανάλογα με τις τιμές των μεταβλητών της.
2. Δημιουργούμε ομάδες με "1" των 2, 4, 8, 16 μελών από γειτονικά τετράγωνα (οριζόντια ή κάθετα, συνεχόμενα ή αναδιπλούμενα, αλλά όχι διαγώνια). Προσπαθούμε να δημιουργούμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερες ομάδες. Κάθε "1" μπορεί να συμμετέχει σε περισσότερες από μία ομάδες.
3. Εξετάζουμε τις ομάδες που προέκυψαν και κρατάμε μόνο τους σταθερούς όρους από κάθε μία (παραλείπουμε δηλαδή τις μεταβλητές που μέσα στην ομάδα αλλάζουν τιμή).
4. Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση αθροίζοντας τις νέες ομάδες που δημιουργήθηκαν.

Παράδειγμα 1:

Έστω μία λογική συνάρτηση F η οποία έχει 3 μεταβλητές και που μας δίνει τον επόμενο πίνακα αληθείας. Από τον πίνακα αυτό δημιουργούμε τον αντίστοιχο χάρτη Karnaugh.

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Στη συνέχεια προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ομάδες «1» στον χάρτη.

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

1η ομάδα

2η ομάδα

Οι ομάδες που δημιουργούνται είναι οι εξής:

- Μία τετράδα με τους όρους: $XY'Z'$, $XY'Z$, XYZ , XYZ' (1^η ομάδα)
- Μία δυάδα με τους όρους: $X'YZ$, XYZ (2^η ομάδα)

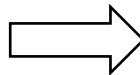
Σε κάθε ομάδα εντοπίζουμε τους όρους που παραμένουν σταθεροί και δεν αλλάζουν. Έτσι, για την τετράδα παρατηρούμε ότι ο όρος X παραμένει σταθερός. Για τη δυάδα οι όροι YZ παραμένουν σταθεροί.

Επομένως, η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως: $F = X + YZ$

Παράδειγμα 2:

Έστω μία λογική συνάρτηση F η οποία έχει 4 μεταβλητές και που μας δίνει τον επόμενο πίνακα αληθείας. Από τον πίνακα αυτό δημιουργούμε τον αντίστοιχο χάρτη Karnaugh.

X	Y	Z	W	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



ZW \ XY	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	1	1

Στη συνέχεια προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ομάδες «1» στον χάρτη.

Οι ομάδες που δημιουργούνται είναι οι παρακάτω:

ZW \ XY	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	1	1

1η ομάδα (row 00)
 2η ομάδα (col 10)
 3η ομάδα (row 10)
 4η ομάδα (col 00)

- 1^η ομάδα: $X'Y'Z'W'$, $X'Y'Z'W$, $X'Y'ZW$, $X'Y'ZW'$
- 2^η ομάδα: $XYZW'$, $XY'ZW'$
- 3^η ομάδα: $X'YZW$, $XY'ZW'$, $X'Y'ZW$, $X'Y'ZW'$
- 4^η ομάδα: $X'Y'Z'W'$, $X'Y'Z'W$, $XY'Z'W'$, $XY'Z'W$

Σε κάθε ομάδα εντοπίζουμε τους όρους που παραμένουν σταθεροί και δεν αλλάζουν. Έτσι έχουμε:

- 1^η ομάδα: $X'Y'$
- 2^η ομάδα: XZW'
- 3^η ομάδα: $Y'Z$
- 4^η ομάδα: $Y'W'$

Επομένως, η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως: $F = X'Y' + XZW' + Y'Z + Y'W'$

10.3 Ασκήσεις

1. Απλοποιήστε τις παρακάτω συναρτήσεις Boole χρησιμοποιώντας χάρτη Karnaugh:

1. $F = A'C + A'B + AB'C + BC$

2. $F = A'B'C + BCD' + A'BCD' + AB'C'$