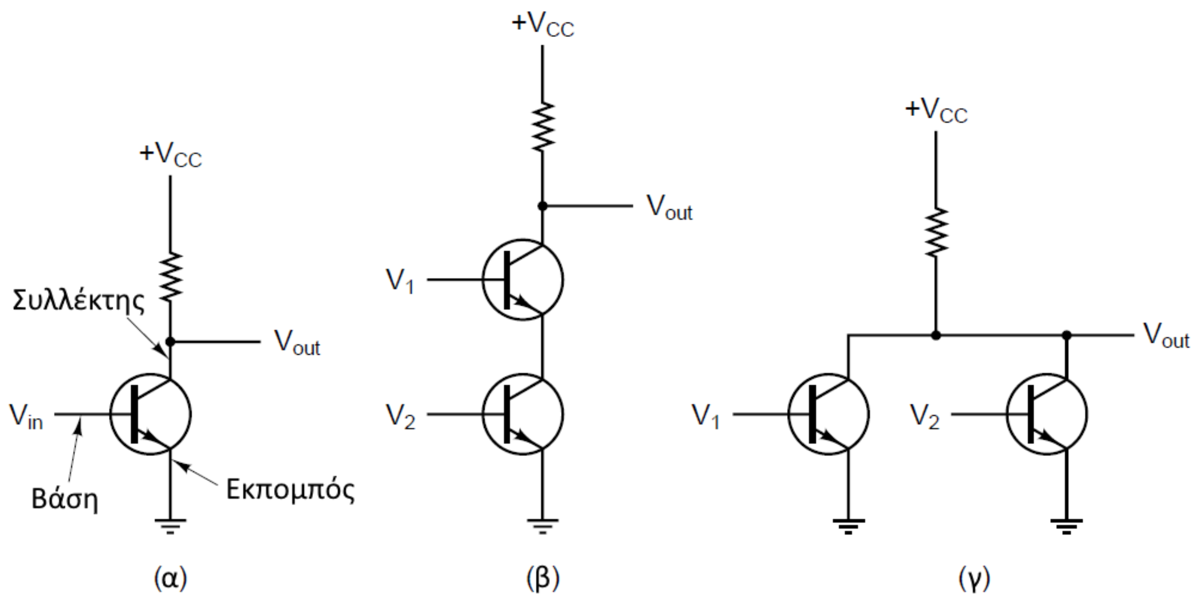
Μάθημα 9: Λογικές Πύλες - Άλγεβρα Boole

9.1 Λογικές πύλες

Τα ψηφιακά κυκλώματα κατασκευάζονται από ένα μικρό αριθμό πρωτογενών στοιχείων τα οποία συνδυάζονται με αναρίθμητους τρόπους. Σε ένα ψηφιακό κύκλωμα υπάρχουν μόνο δύο λογικές τιμές. Συνήθως, ένα σήμα περίπου 0 volt αντιπροσωπεύει τη μία τιμή (το λογικό «0») και ένα σήμα γύρω στα 5 volt αντιπροσωπεύει την άλλη τιμή (το λογικό «1»). Τάσεις έξω από αυτό το εύρος δεν επιτρέπονται. Μικροσκοπικές ηλεκτρονικές συσκευές που ονομάζονται **λογικές πύλες (logical gates)** μπορούν να υπολογίζουν διάφορες συναρτήσεις αυτών των δίτιμων σημάτων και αποτελούν τη βάση υλικού πάνω στην οποία οικοδομούνται όλοι οι ψηφιακοί υπολογιστές.

Όλη η ψηφιακή λογική βασίζεται στο γεγονός ότι ένα τρανζίστορ μπορεί να λειτουργεί ως ένας πολύ γρήγορος δυαδικός διακόπτης. Στο Σχ. 9.1-(α) φαίνεται ένα διπολικό τρανζίστορ (ο κύκλος) ενσωματωμένο σε ένα απλό κύκλωμα. Αυτό το τρανζίστορ έχει τρεις συνδέσεις με τον εξωτερικό κόσμο: τον **συλλέκτη** (collector), τη **βάση** (base) και τον **εκπομπό** (emitter).



Σχήμα 9.1: *(α) Τρανζίστορ αντιστροφέας, (β) Πύλη NAND, (γ) Πύλη NOR*

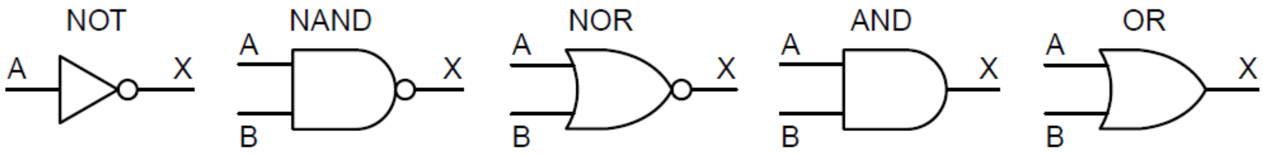
Όταν η τάση εισόδου Vin είναι περίπου 0 volt τότε το τρανζίστορ απενεργοποιείται, συμπεριφέρεται σαν μία αντίσταση άπειρου μεγέθους και η τάση εξόδου Vout παίρνει μία τιμή κοντά στην τάση Vcc, μία εξωτερική τάση η οποία είναι συνήθως +5 volt. Όταν η τάση εισόδου Vin είναι μεγαλύτερη από 0 volt (π.χ. 5 volt) τότε το τρανζίστορ ενεργοποιείται και συμπεριφέρεται ως αγωγός με αποτέλεσμα η Vout να γίνεται γείωση (κατά σύμβαση 0 volt).

Συνεπώς όταν η τάση Vin είναι στην χαμηλή της κατάσταση τότε η Vout είναι στην υψηλή της, και το αντίστροφο. Η αντίσταση (πριονωτή γραμμή) χρειάζεται μόνο για να περιορίσει την ποσότητα ρεύματος που θα φτάσει στο τρανζίστορ. Ο χρόνος μετάβασης από τη μία κατάσταση στην άλλη είναι λίγα νανοδευτερόλεπτα.

Στο Σχ. 9.1-(β), τα δύο τρανζίστορ είναι συνδεδεμένα σε σειρά. Αν οι τάσεις V_1 και V_2 είναι και οι δύο στην υψηλή τους κατάσταση τότε και τα δύο τρανζίστορ άγουν ρεύμα και η Vout είναι στη χαμηλή της κατάσταση. Αν οποιαδήποτε από τις δύο εισόδους είναι στη χαμηλή κατάσταση τότε το αντίστοιχο τρανζίστορ δεν άγει ρεύμα και η έξοδος είναι στην υψηλή της κατάσταση. Με άλλα λόγια η Vout θα είναι στη χαμηλή κατάσταση μόνο αν και η V_1 και η V_2 είναι στην υψηλή κατάσταση.

Στο Σχ. 9.1-(γ), τα δύο τρανζίστορ είναι συνδεδεμένα παράλληλα και όχι σε σειρά. Σε αυτή τη διευθέτηση αν οποιαδήποτε από τις δύο εισόδους είναι στην υψηλή κατάσταση τότε το αντίστοιχο τρανζίστορ ενεργοποιείται και η έξοδος γίνεται γείωση. Αν και οι δύο είσοδοι είναι στη χαμηλή κατάσταση η έξοδος παραμένει στην υψηλή κατάσταση.

Αυτά τα τρία κυκλώματα είναι οι απλούστερες πύλες. Ονομάζονται **πύλες NOT**, **NAND** και **NOR** αντίστοιχα. Οι πύλες NOT λέγονται συχνά **αντιστροφείς**. Αν η υψηλή κατάσταση (Vcc volt) είναι το λογικό «1» και η χαμηλή κατάσταση (γείωση) είναι το λογικό «0» τότε μπορούμε να εκφράσουμε την τιμή εξόδου ως συνάρτηση των τιμών εισόδου. Στο Σχ. 9.2(α)-(γ) φαίνονται τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των τριών αυτών πυλών καθώς και η συναρτησιακή συμπεριφορά του κάθε κυκλώματος. Τα A και B είναι οι είσοδοι, το X είναι η έξοδος.



A	X
0	1
1	0

(α)

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(β)

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(γ)

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(δ)

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(ε)

Σχήμα 9.2: *Τα σύμβολα και η συναρτησιακή συμπεριφορά των πέντε βασικών πυλών*

Αν το σήμα του Σχ. 9.2-(β) τροφοδοτηθεί σε ένα κύκλωμα αντιστροφέα, παίρνουμε ένα άλλο κύκλωμα που είναι ακριβώς το αντίστροφο της πύλης NAND. Το κύκλωμα αυτό λέγεται πύλη **AND** και η συναρτησιακή του συμπεριφορά φαίνεται στο Σχ. 9.2-(δ). Παρόμοια, αν το σήμα του Σχ. 9.2-(γ) τροφοδοτηθεί σε ένα κύκλωμα αντιστροφέα, παίρνουμε ένα άλλο κύκλωμα που είναι ακριβώς το αντίστροφο της πύλης NOR, το οποίο λέγεται πύλη **OR** και η συναρτησιακή του συμπεριφορά φαίνεται στο Σχ. 9.2-(ε).

Τα κυκλάκια που χρησιμοποιούνται στα σύμβολα του αντιστροφέα, της πύλης NAND και της πύλης NOR λέγονται **φυσαλίδες αντιστροφής** και χρησιμοποιούνται γενικά για να υποδηλώνουν αντεστραμμένο σήμα. Οι πέντε πύλες του Σχ. 9.2 είναι οι βασικές δομικές μονάδες του επιπέδου ψηφιακής λογικής. Οι πύλες μπορούν να έχουν περισσότερες από 2 εισόδους αλλά στην πράξη δεν συνηθίζονται περισσότερες από οκτώ είσοδοι.

9.2 Άλγεβρα Boole

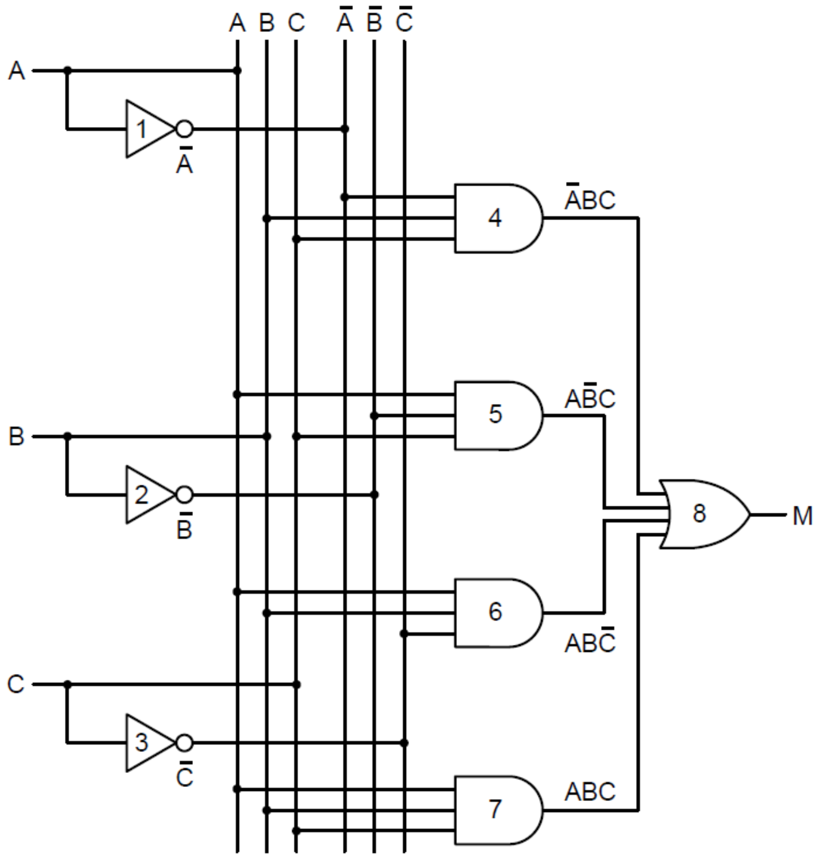
Για την περιγραφή των κυκλωμάτων που μπορούν να δημιουργηθούν με το συνδυασμό πυλών, χρειάζεται ένας νέος τύπος άλγεβρας, όπου οι μεταβλητές και οι συναρτήσεις να μπορούν να παίρνουν μόνο τις τιμές 0 και 1. Μία τέτοια άλγεβρα ονομάζεται **άλγεβρα Boole**, από το δημιουργό της Άγγλο Μαθηματικό George Boole (1815 – 1864). Όπως και η συνηθισμένη άλγεβρα (του γυμνασίου), έτσι και η άλγεβρα Boole έχει συναρτήσεις. Μία συνάρτηση άλγεβρας Boole έχει μία ή περισσότερες μεταβλητές εισόδου και δίνει ένα αποτέλεσμα που εξαρτάται από τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Επειδή μία συνάρτηση Boole *N* μεταβλητών έχει μόνο 2^N πιθανούς συνδυασμούς τιμών εισόδου, η συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί πλήρως με έναν πίνακα 2^N γραμμών, όπου η κάθε γραμμή δίνει την τιμή της συνάρτησης για έναν διαφορετικό συνδυασμό τιμών εισόδου. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται **πίνακας αληθείας**. Οι πίνακες του Σχ. 9.2 αποτελούν τέτοιους πίνακες. Σε τέτοιους πίνακες οι γραμμές τους γράφονται πάντα με αριθμητική σειρά (με βάση το 2), για παράδειγμα με τη σειρά 00, 01, 10, 11 για δύο μεταβλητές.

Ας θεωρήσουμε ένα πιο σύνθετο κύκλωμα, όπως αυτό του Σχ. 9.3(β) μαζί με τον πίνακα αληθείας του, βλ. Σχ. 9.3(α). Η συνάρτηση M = f(A, B, C) είναι η λογική συνάρτηση πλειοψηφίας, δηλαδή είναι 0 αν η πλειοψηφία των εισόδων της είναι 0, και 1 αν η πλειοψηφία των εισόδων της είναι 1.

A	B	C	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(α)



(β)

Σχήμα 9.3: *(α) Ο πίνακας αληθείας της συνάρτησης πλειοψηφίας τριών μεταβλητών.*
(β) Ένα κύκλωμα για τον πίνακα (α) που χρησιμοποιεί 3 αναστροφείς NOT, 3 πύλες AND και 1 πύλη OR.

Κατά σύμβαση, βάζουμε μια γραμμή πάνω από μια μεταβλητή εισόδου για να σημειώσουμε ότι η τιμή της είναι ανεστραμμένη. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε υπονοούμενο πολλαπλασιασμό ή μία τελεία για να συμβολίσουμε τη συνάρτηση AND και το + για να συμβολίσουμε τη συνάρτηση OR.

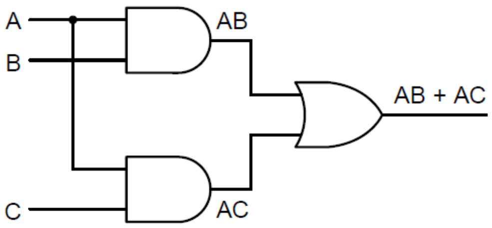
Βάσει των παραπάνω και επειδή ένας πίνακας αληθείας γίνεται όλο και πιο δύσχρηστος όσο αυξάνεται ο αριθμός των μεταβλητών, βοηθάει να γράφουμε τη συνάρτηση του κυκλώματος σε μία πιο «αλγεβρική μορφή». Για παράδειγμα, για το κύκλωμα του Σχ. 9.3(β) θα μπορούσαμε να γράψουμε τη συνάρτηση που το χαρακτηρίζει ως εξής

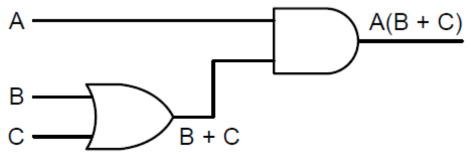
$$M = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

προκειμένου να αποδώσουμε με πιο συμπαγή τρόπο τον πίνακα αληθείας του.

Οι σχεδιαστές κυκλωμάτων συχνά προσπαθούν να μειώσουν τον αριθμό των πυλών στα προϊόντα τους ώστε να μειώσουν το κόστος των εξαρτημάτων, το χώρο που αυτά καταλαμβάνουν, την κατανάλωση ισχύος κλπ. Για να γίνει κάτι τέτοιο, ο σχεδιαστής πρέπει να βρει κάποιο άλλο ισοδύναμο κύκλωμα που να υπολογίζει την ίδια συνάρτηση με το αρχικό αλλά να χρησιμοποιεί λιγότερες (ή και απλούστερες) πύλες. Η άλγεβρα Boole είναι πολύτιμο εργαλείο για την αναζήτηση ισοδύναμων κυκλωμάτων.

Ας πάρουμε το κύκλωμα και τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης AB + AC που φαίνεται στο Σχ. 9.4(α).





A	B	C	AB	AC	AB + AC
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

(α)

A	B	C	A	B + C	A(B + C)
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(β)

Σχήμα 9.4: *Δύο ισοδύναμες συναρτήσεις: (α) AB + AC και (β) A(B+C)*

Όπως φαίνεται στο Σχ. 9.4(β), η συνάρτηση AB + AC μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε A(B + C) και να δώσει ένα ισοδύναμο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το κύκλωμα του Σχ. 9.4(β). Μάλιστα, το κύκλωμα αυτό θεωρείται καλύτερο διότι περιέχει λιγότερες πύλες.

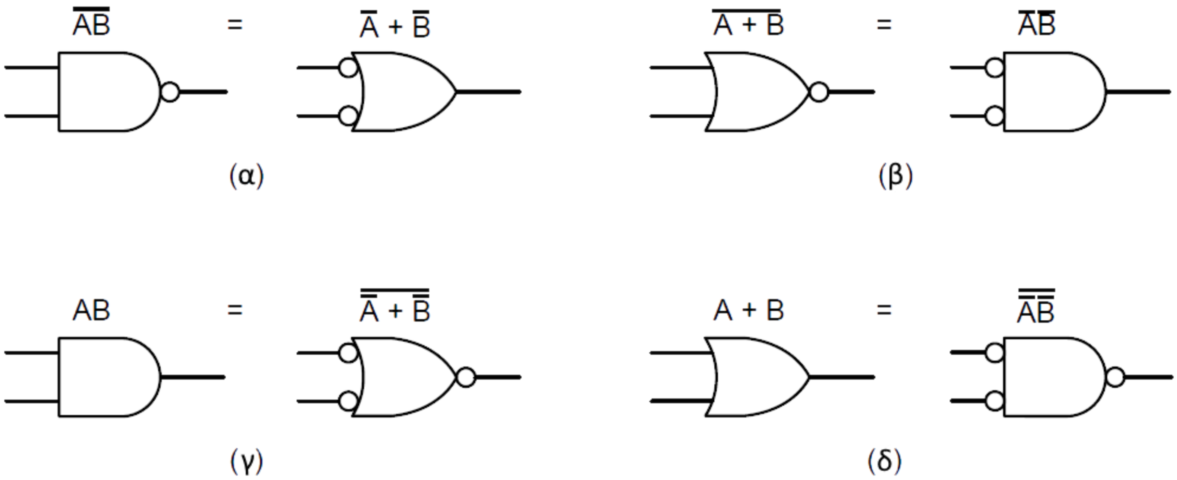
Στην απλοποίηση των συναρτήσεων της άλγεβρας Boole βοηθούν και οι ταυτότητές της. Στο Σχ. 9.5 φαίνονται οι πιο σημαντικές από τις ταυτότητες αυτές.

Όνομα	**Μορφή AND**	**Μορφή OR**
Νόμος ταυτότητας	$1A = A$	$0 + A = A$
Νόμος μηδενικού στοιχείου	$0A = 0$	$1 + A = 1$
Νόμος ταυτοδυναμίας	$AA = A$	$A + A = A$
Νόμος αντιστροφής	$A\overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
Αντιμεταθετικός νόμος	$AB = BA$	$A + B = B + A$
Προσεταιριστικός νόμος	$(AB)C = A(BC)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Επιμεριστικός νόμος	$A + BC = (A + B)(A + C)$	$A(B + C) = AB + AC$
Νόμος απορρόφησης	$A(A + B) = A$	$A + AB = A$
Νόμος de Morgan	$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}$

Σχήμα 9.5: *Μερικές ταυτότητες της άλγεβρας Boole*

Παρατηρούμε ότι πολλοί από τους κανόνες της συνηθισμένης άλγεβρας ισχύουν και στην άλγεβρα Boole. Όλοι οι νόμοι μπορούν να αποδειχθούν εύκολα με την κατασκευή των πινάκων αληθείας τους. Με εξαίρεση το νόμο του de Morgan, το νόμο της απορρόφησης και τη μορφή AND του επιμεριστικού νόμου, τα αποτελέσματα είναι μάλλον προφανή στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Ο νόμος του de Morgan μπορεί να επεκταθεί για περισσότερες από δύο μεταβλητές, για παράδειγμα: $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

Ο νόμος του de Morgan μας επιτρέπει έναν εναλλακτικό συμβολισμό. Στο Σχ. 9.6(α) η μορφή AND εμφανίζεται με αρνήσεις στην είσοδο και την έξοδο. Έτσι, μια πύλη OR με αντεστραμμένες εισόδους είναι ισοδύναμη με μια πύλη NAND. Στο Σχ. 9.6(β) είναι φανερό ότι μια πύλη NOR μπορεί να σχεδιαστεί ως πύλη AND με αντεστραμμένες εισόδους. Ομοίως, στα σχήματα 9.6(γ) και 9.6(δ) έχουμε τις ισοδύναμες αναπαραστάσεις των πυλών AND και OR.

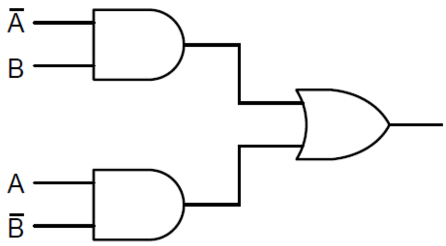


Σχήμα 9.6: *Εναλλακτικά σύμβολα για μερικές πύλες: (α) NAND, (β) NOR, (γ) AND, (δ) OR*

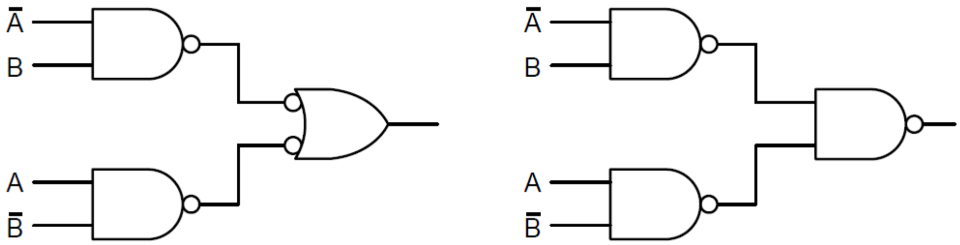
Με βάση τα εναλλακτικά σύμβολα θα μπορούσαμε να μετασχηματίσουμε πολύ εύκολα ένα κύκλωμα στο ισοδύναμό του. Για παράδειγμα, η συνάρτηση **XOR** (eXclusive OR – αποκλειστικό OR) του Σχ. 9.7(α) μπορεί να υλοποιηθεί σταδιακά από το Σχ. 9.7(β) στο Σχ. 9.7(δ) περνώντας προηγουμένως από το Σχ. 9.7(γ).

A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(α)



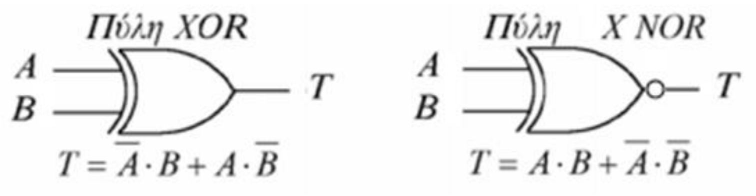
(β)



(γ) (δ)

Σχήμα 9.7: *(α) Πίνακας αληθείας της XOR. (β) – (δ) Τρία κυκλώματα για τον υπολογισμό της XOR.*

Η συνάρτηση XOR εναλλακτικά συμβολίζεται ως μία πύλη όπως αυτή του Σχ. 9.8(α). Ομοίως, η συνάρτηση **XNOR** (eXclusive Not OR – αποκλειστικό όχι OR) συμβολίζεται ως μία πύλη όπως αυτή του Σχ. 9.8(β)



XOR

A	B	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(α)

XNOR

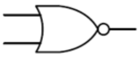
A	B	T
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(β)

Σχήμα 9.8: *(α) Πύλη XOR, (β) Πύλη XNOR.*

9.3 Ασκήσεις

1. *Συμπλήρωσε τα κενά με τις λέξεις που λείπουν:*

1. Ένα τρανζίστορ έχει 3 συνδέσεις με τον εξωτερικό κόσμο: τον συλλέκτη, τη βάση και τον …………………………………… .
2. Το σύμβολο  αντιπροσωπεύει τη λογική πύλη που ονομάζεται …………………………………… .
3. Το σύμβολο  αντιπροσωπεύει τη λογική πύλη που ονομάζεται …………………………………… .
4. Η ταυτότητα $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ της άλγεβρας Boole εκφράζει τον νόμο …………………………………… .
5. Ένας πίνακας με 2^n γραμμές, όπου η κάθε γραμμή εκφράζει την τιμή μιας συνάρτησης Boole για έναν διαφορετικό συνδυασμό τιμών εισόδου *n* μεταβλητών, ονομάζεται ………………… ………………… .

2. *Απλοποιείστε τις παρακάτω συναρτήσεις Boole σε έναν ελάχιστο αριθμό παραγόντων:*

1. ABC + A’B + ABC’
2. (x + y)(x + y’)
3. (BC’ + A’D)(AB’ + CD’)
4. x’y + xy’ + xy + x’y’
5. A’B(D’ + C’D) + B(A + A’CD) ← καταλήξτε σε έναν όρο μόνο